УДК 368/369 **DOI** 10.17150/2500-2759.2019.29(1).95-106

МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕРТНОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ НА ПРИМЕРЕ РОССИИ

О.В. Леонова
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
20 января 2019 г.

Дата принятия к печати
12 марта 2019 г.

Дата онлайн-размещения
4 апреля 2019 г.

Ключевые слова
Системный анализ; системный подход; аналитические законы; таблицы смертности; кривая смертей; функция выживания; интенсивность смертности; метод наименьших квадратов; коэффициент детерминации

Аннотация
В данной работе используется системный подход к моделированию аналитических законов смертности. Работа посвящена моделированию таких вероятностных характеристик, как кривая смертей, функция выживания, интенсивность смертности. В статье данные таблиц смертности населения России для календарного года 2017 аппроксимированы следующими классическими аналитическими законами: де Муавра, Гомпертца, Мэйкхама, Вейбулла, Эрланга. Для каждого класса распределений решена задача оценивания неизвестных параметров с помощью различных методов. Качество подгонки всех простроенных моделей протестировано с применением коэффициента детерминации. Для нахождения оценок неизвестных параметров, вычисления по модели значения результирующего признака, определения коэффициента детерминации, построения графиков подбора была использована программа Microsoft Excel. В результате исследования установлено, что распределение смертности населения лучше всего описывается моделью Мэйкхама с оцененными параметрами.

POPULATION DEATH RATE MODELING BY MEANS OF ANALYTICAL LAWS ILLUSTRATED BY THE EXAMPLE OF RUSSIA

Olga V. Leonova
Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation

Article info
Received
January 20, 2019

Accepted
March 12, 2019

Available online
April 4, 2019

Keywords
System analysis; system approach; analytical laws; mortality tables; deaths graph; survival function; mortality rate; least square method; determination coefficient

Abstract
In this paper, the author uses a system approach for modeling analytical laws of mortality. The article considers modeling such probabilistic characteristics as: deaths graph, survival function, mortality rate. The data tables of Russia's population mortality in 2017 are approximated by such traditional analytical laws as that of de Moivre, Gompertz, Makeham, Weibull and Erlang. For each class of distributions the problem of estimation of unknown parameters is solved by using different methods. The quality of models fitting was tested with the help of determination coefficient. Microsoft Excel was used to find estimates of unknown parameters, calculate the value based on the resulting feature model, calculate the determination coefficient, and build selection graphs. The author draws a conclusion that distribution of population mortality is best described by Makeham model with estimated parameters.

В настоящее время математическое моделирование процессов и явлений играет большую роль в различных областях научных исследований. Например, в [1] авторы анализируют подходы к моделированию средств массовой информации, в [2; 3] исследователь использует модели оптимального управления для построения финансовой и кредитной политики фирмы. В [4; 5] авторы проводят эконометрическое моделирование для исследования ценообразования на рынке недвижимости.

В данной работе математическое моделирование используется в целях системного изучения и статистического анализа продолжительности жизни населения.

Для качественного исследования продолжительности жизни большую роль играет статистический анализ данных смертности населения в зависимости от различных факторов [6]. В данной статье автор рассматривает зависимость продолжительности жизни только от возраста индивида.

Как правило, для анализа законов смертности населения используют два основных подхода:

– построение единой математической формулы закона смертности, представление вероятности смертности как непрерывной величины, значения которой можно рассчитать на любой момент жизни человека [7; 8];

– построение таблиц смертности, в которых учитываются усредненные для данного возраста вероятности смерти. Таблицы смертности содержат расчетные показатели, характеризующие смертность населения по отдельным возрастам, а также доживаемость человека при переходе из одной возрастной группы в другую [9].

Неопределенность или непредсказуемость момента смерти человека является источником случайности, что позволяет рассматривать продолжительность жизни человека как непрерывную случайную величину X [10].

При теоретическом анализе процессов смертности, первоначальном и упрощенном изучении реальных ситуаций используют, как правило, стандартные вероятностные модели, позволяющие выявить основные закономерности, интересующие исследователя. Некоторые реальные процессы смертности хорошо аппроксимируются рассматриваемыми ниже аналитическими законами.

Аппроксимация статистических данных аналитическими законами смертности

Задача — проанализировать возможности использования классических моделей в качестве законов смертности для статистических данных, приведенных в таблице смертности населения России для календарного года 2017 (прил.).

На рис. 1 представлена диаграмма рассеивания точек (x_i, y_i), где x_i — возраст человека, y_i — количество людей, умерших в возрасте x лет.

1. *Модель де Муавра*. Учитывая, что предельный возраст, по данным таблицы смертности, составляет 110 лет, то оценка параметра $\hat{\omega} = 110$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{110}, \quad \hat{F}(x) = \frac{x}{110}, \quad \hat{s}(x) = 1 - \frac{x}{110},$$

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{110 - x}, 0 < x < 110.$$

Кривая смертей $\hat{f}(x) = \dfrac{1}{110}$ не отражает многие характерные особенности, связанные с продолжительностью жизни человека, так как является горизонтальной прямой, а эмпирическая кривая имеет максимум в районе 72 лет (рис. 2).

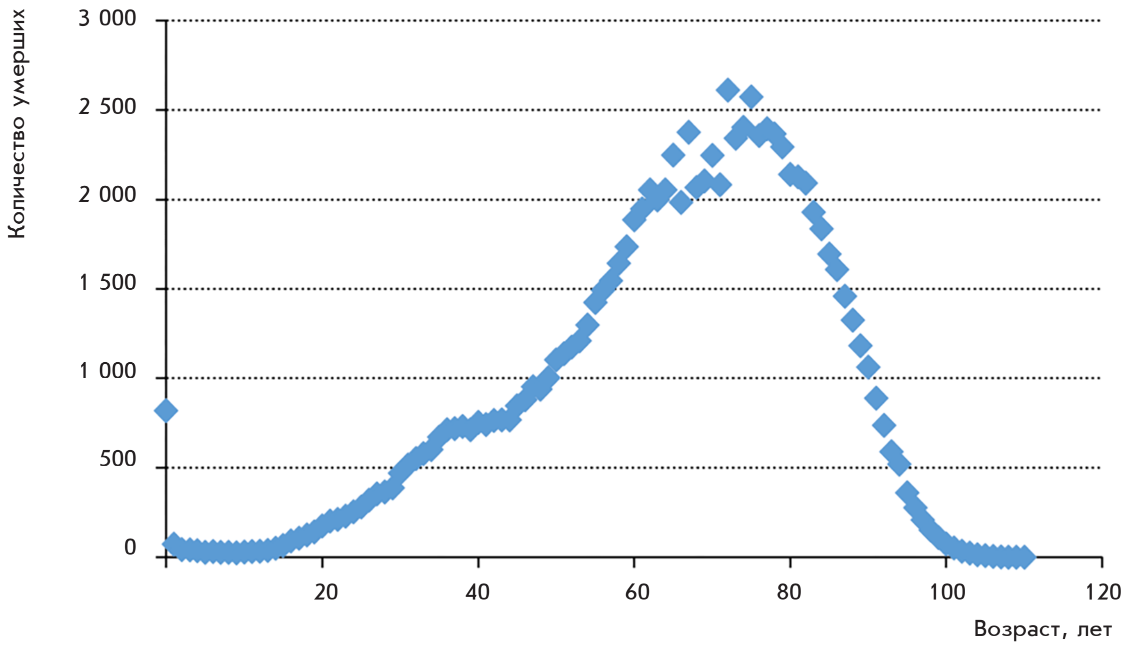

Рис. 1. Зависимость смертности от возраста

ISSN 2500-2759

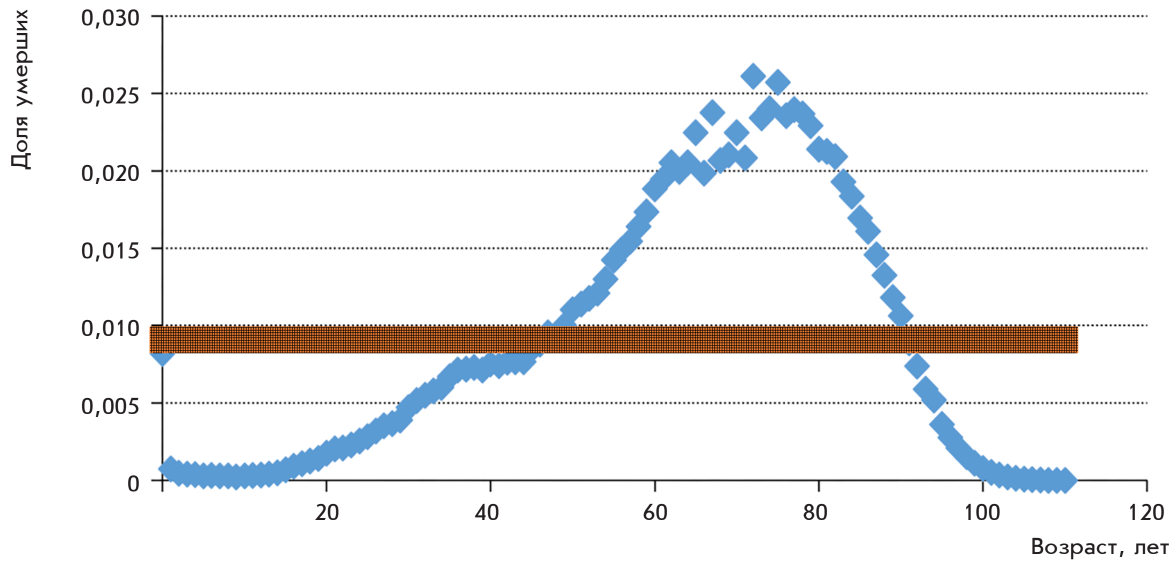

Рис. 2. График подбора кривой смертей модели де Муавра

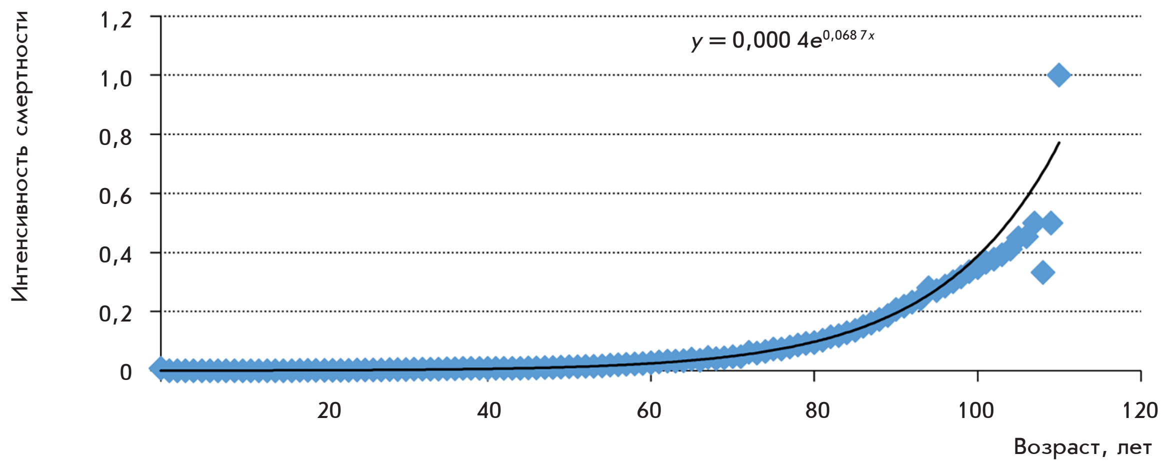

Рис. 3. Аппроксимация данных экспоненциальной моделью

2. Модель *Гомпертца*. В модели Гомпертца интенсивность смертности задается формулой $\mu_x = \beta e^{\alpha x}$. Для нахождения оценок параметров α и β можно использовать метод наименьших квадратов [11].

С целью построения линии тренда (аппроксимации и сглаживания) воспользуемся возможностями Microsoft Excel (рис. 3).

Таким образом, оцененная интенсивность смертности имеет вид

$$\hat{\mu}_x = 0{,}000\,4e^{0{,}068\,7x},$$

функция выживания —

$$\hat{s}(x) = exp\left[-\frac{0{,}000\,4\left(e^{0{,}068\,7x}-1\right)}{0{,}068\,7}\right],$$

кривая смертей —

$$\hat{f}(x) = 0{,}000\,4exp\left[0{,}068\,7x - \frac{0{,}000\,4\left(e^{0{,}068\,7x}-1\right)}{0{,}068\,7}\right].$$

Графики подбора модельных значений эмпирическим данным представлены на рис. 4 и 5.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 4) с помощью коэффициента детерминации для интенсивности смертности: $R^2 = 0{,}960\,5 \Rightarrow$ качество подгонки хорошее и модель можно использовать для анализа и прогноза.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 5) с помощью коэффициента детерминации для кривой смертей: $R^2 = 0{,}910\,5 \Rightarrow$ качество подгонки хорошее и модель можно использовать для анализа и прогноза.

3. *Модель Мэйкхама*. В модели Мэйкхама интенсивность смертности определяется функцией $\mu_x = A + \beta e^{\alpha x}$. Она называется моди-

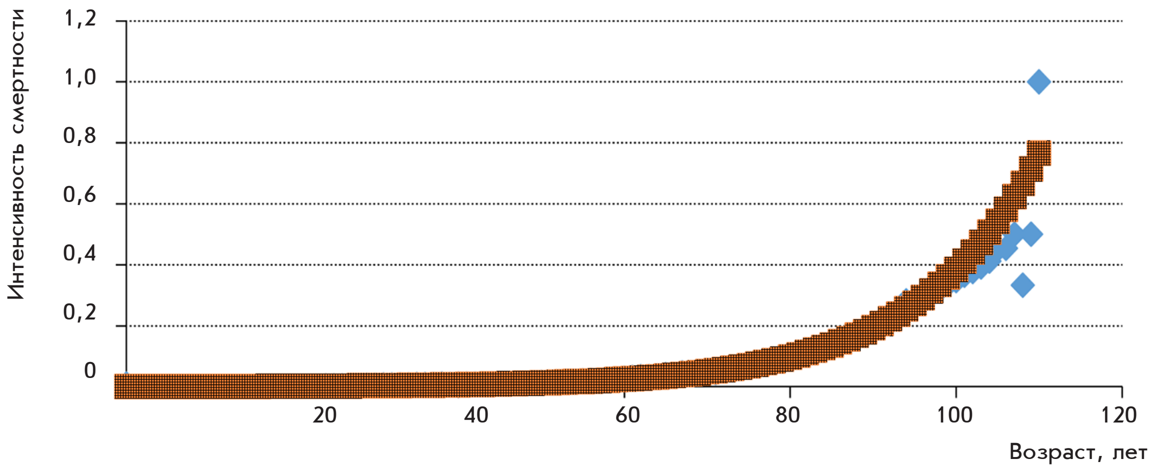

Рис. 4. График подбора интенсивности смертности модели Гомпертца

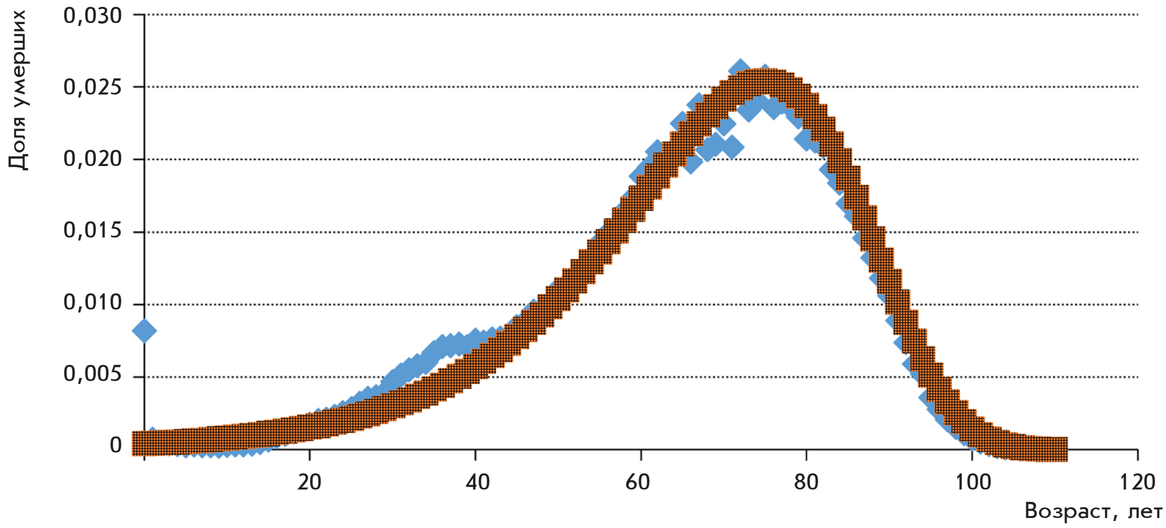

Рис. 5. График подбора кривой смертности модели Гомпертца

фицированной экспонентой. Ее недостаток заключается в том, что она является существенно нелинейной моделью [12]. Таким образом, ее невозможно линеаризовать, чтобы воспользоваться методом наименьших квадратов для нахождения оценок параметров.

Для нахождения оценок параметров составим систему из трех уравнений с тремя неизвестными A, β, α, решение которой и даст оценки неизвестных параметров.

Рассмотрим функцию распределения для модели Мэйкхама:

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - exp\left[-Ax - \frac{\beta\left(e^{\alpha x} - 1\right)}{\alpha}\right],$$

найдем верхний, нижний квартили и медиану этого распределения по таблице смертности (см. прил.). Как известно [13], квантиль уровня p определяется по формуле $P(X < x_p) = F(x_p) = 1 - S(x_p) = p$, поэтому верхний квартиль $x_{0,75} = 78,5$ года, нижний квартиль $x_{0,25} = 54,5$ года, медиана $x_{0,5} = 68$ лет.

Тогда система нелинейных уравнений будет иметь вид

$$1 - exp\left[-Ax - \frac{\beta\left(e^{78,5\alpha} - 1\right)}{\alpha}\right] = 0,75,$$

$$1 - exp\left[-Ax - \frac{\beta\left(e^{68\alpha} - 1\right)}{\alpha}\right] = 0,5,$$

$$1 - exp\left[-Ax - \frac{\beta\left(e^{54,5\alpha} - 1\right)}{\alpha}\right] = 0,25.$$

ISSN 2500-2759

Решая эту систему, получим оценки параметров:

$$\hat{A}=0{,}000557,\ \hat{\beta}=0{,}00004,\ \hat{\alpha}=0{,}0687.$$

Таким образом, оцененная интенсивность смертности имеет вид

$$\hat{\mu}_x=0{,}000557+0{,}0004e^{0{,}0687x},$$

функция выживания —

$$\hat{s}(x)=exp\left[-0{,}000557x-\frac{0{,}0004\left(e^{0{,}0687x}-1\right)}{0{,}0687}\right],$$

кривая смертей —

$$\hat{f}(x)=\left[0{,}000557+0{,}0004e^{0{,}0687x}\right]exp$$

$$\left[-0{,}000557x-\frac{0{,}0004\left(e^{0{,}0687x}-1\right)}{0{,}0687}\right].$$

Графики подбора модельных значений эмпирическим данным представлены на рис. 6 и 7.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 6) с помощью коэффициента детерминации для интенсивности смертности: $R^2=0{,}996 \Rightarrow$ качество подгонки хорошее и модель можно использовать для анализа и прогноза.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 7) с помощью коэффициента детерминации для кривой смертей: $R^2=0{,}995 \Rightarrow$ качество подгонки хорошее и модель можно использовать для анализа и прогноза.

4. *Модель Вейбулла*. В модели Вейбулла интенсивность смертности задается функцией $\mu_x = kx^n$. Это степенная функция, которая легко может быть линеаризована с помощью логарифмических преобразований. Для нахождения оценок параметров k и n можно использовать метод наименьших квадратов [14].

Для построения линии тренда (аппроксимации и сглаживания) воспользуемся возможностями Microsoft Excel (рис. 8).

Таким образом, оцененная интенсивность смертности имеет вид

$$\hat{\mu}_x=5E-06x^{2{,}1222},$$

функция выживания —

$$\hat{s}(x)=exp\left[-\frac{5E-0{,}6}{3{,}1222}x^{3{,}1222}\right],$$

кривая смертей —

$$\hat{f}(x)=5E-0{,}6x^{2{,}1222}\,exp\left[-\frac{5E-0{,}6}{3{,}1222}x^{3{,}1222}\right].$$

Графики подбора модельных значений эмпирическим данным представлены на рис. 9 и 10.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 9) с помощью коэффициента детерминации для интенсивности смертности: $R^2=0{,}829 \Rightarrow$ качество подгонки хорошее и модель можно использовать для анализа и прогноза.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 10) с помощью коэффициента детерминации для кривой смертей: $R^2=0{,}67 \Rightarrow$ качество подгонки слабое, модель не стоит использовать для анализа и прогноза.

5. *Модель Эрланга*. В модели Эрланга интенсивность смертности описывается функцией

$$\mu_x=\frac{x}{a(x+a)},$$

которая относится к классу нелинеаризуемых, поэтому для нахождения оценок

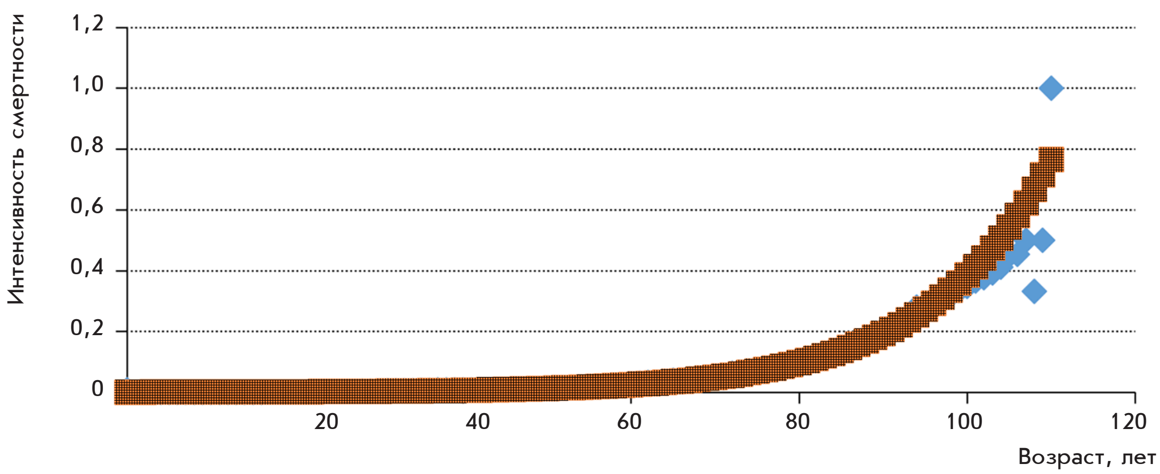

Рис. 6. График подбора интенсивности смертности модели Мэйкхама

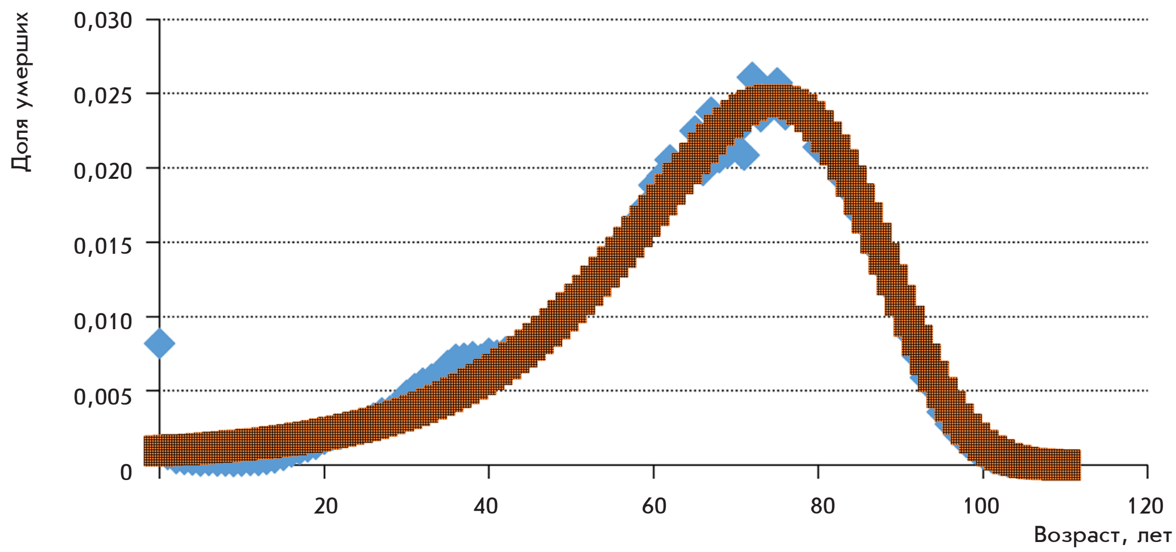

Рис. 7. График подбора кривой смертности модели Мэйкхама

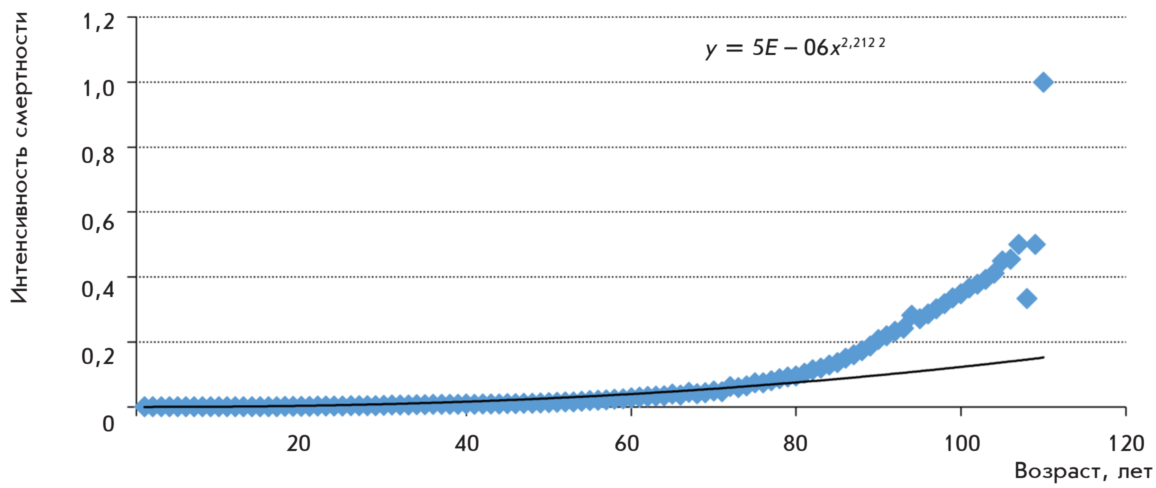

Рис. 8. Аппроксимация данных степенной моделью

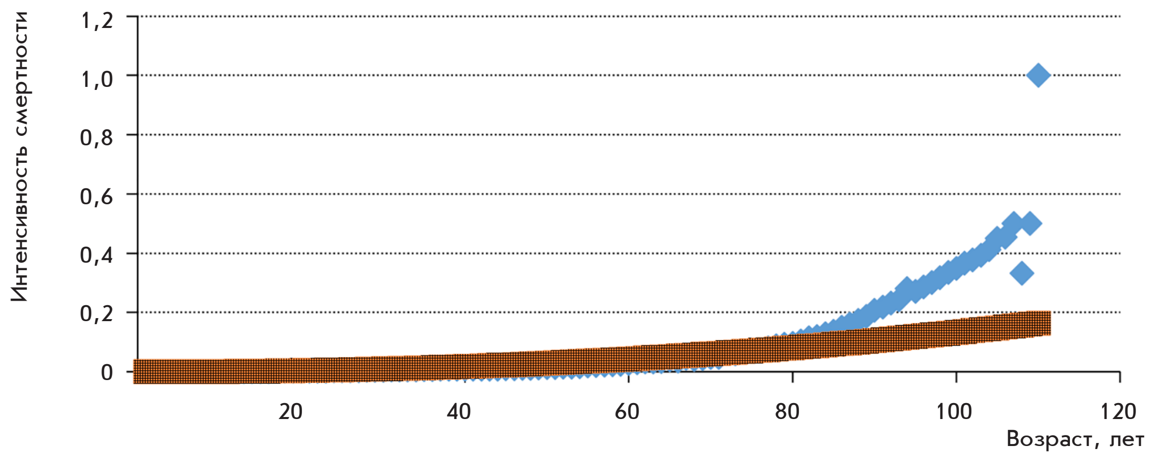

Рис. 9. График подбора интенсивности смертности модели Вейбулла

ISSN 2500-2759

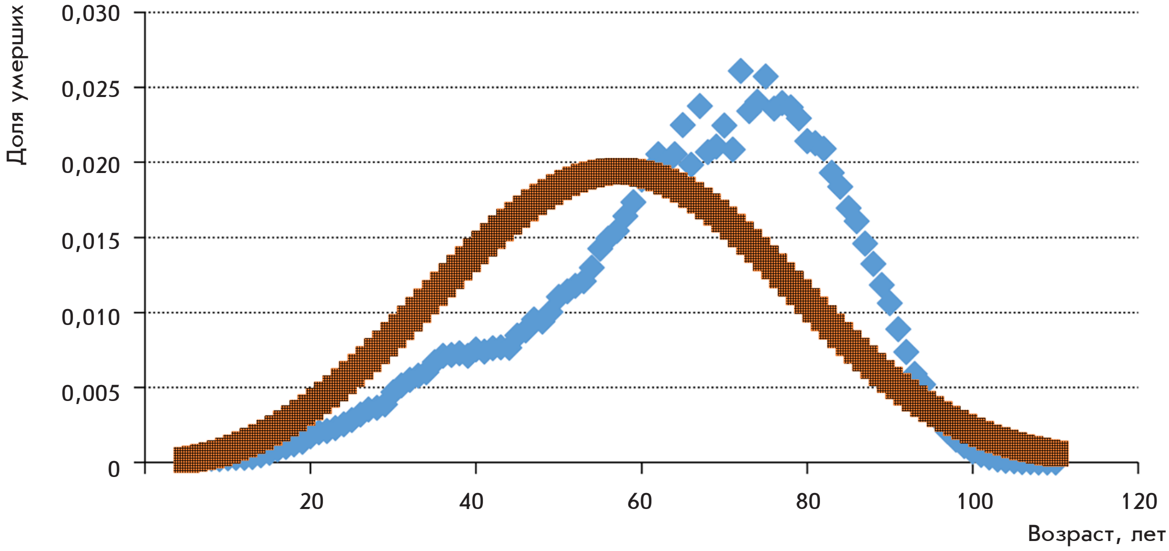

Рис. 10. График подбора кривой смертности модели Вейбулла

параметров воспользуемся методами математического анализа [15].

Для анализа соответствия найдем производную кривой смертей:

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} + \frac{x}{a^2}\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

и приравняем ее к нулю:

$$1 - \frac{x}{a} = 0 \Rightarrow x_{\max} = a.$$

По таблице смертности (см. прил.) определим, что максимум смертей достигается в возрасте 72 года, значит, $\hat{a} = 72$.

Оцененная модель Эрланга будет иметь вид:

– кривая смертей:

$$\hat{f}(x) = \frac{x}{72^2} e^{-\frac{x}{72}}, x \geq 0;$$

– функция выживания:

$$\hat{s}(x) = \frac{x+72}{72} e^{-\frac{x}{72}};$$

– интенсивность смертности:

$$\hat{\mu}_x = \frac{x}{72(x+72)}.$$

Для определения средней продолжительности жизни воспользуемся формулой

$$\mathring{m}_0 = MX = \int_0^{+\infty} s(x)dx,$$

применим метод интегрирования по частям, получим

$$\mathring{m}_0 = \int_0^{+\infty} \frac{x+72}{72} e^{-\frac{x}{a}} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x+72 & dv = \dfrac{e^{-\frac{x}{72}}}{72} dx \\ du = dx & v = -e^{-\frac{x}{72}} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -(x+72)e^{-\frac{x}{72}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{72}} dx =$$

$$= 72 - 72e^{-\frac{x}{72}}\Big|_0^{+\infty} = 72 - 72(0-1) = 144.$$

По таблице смертности максимум $f(x)$ достигается около возраста 72 года. У нас среднее время жизни оказалось вдвое больше максимума и равно 144 годам, что не соответствует реальным данным.

Графики подбора модельных значений эмпирическим данным представлены на рис. 11 и 12.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 11) с помощью коэффициента детерминации для интенсивности смертности: $R^2 = 0{,}33 \Rightarrow$ качество подгонки плохое и модель нельзя применять для анализа и прогноза.

Оценим качество построенной модели (см. рис. 12) с помощью коэффициента детерминации для кривой смертей: $R^2 = 0{,}37 \Rightarrow$ качество подгонки плохое, модель нельзя использовать для анализа и прогноза.

Таким образом, если провести сравнительный анализ пяти классических моделей,

ISSN 2500-2759

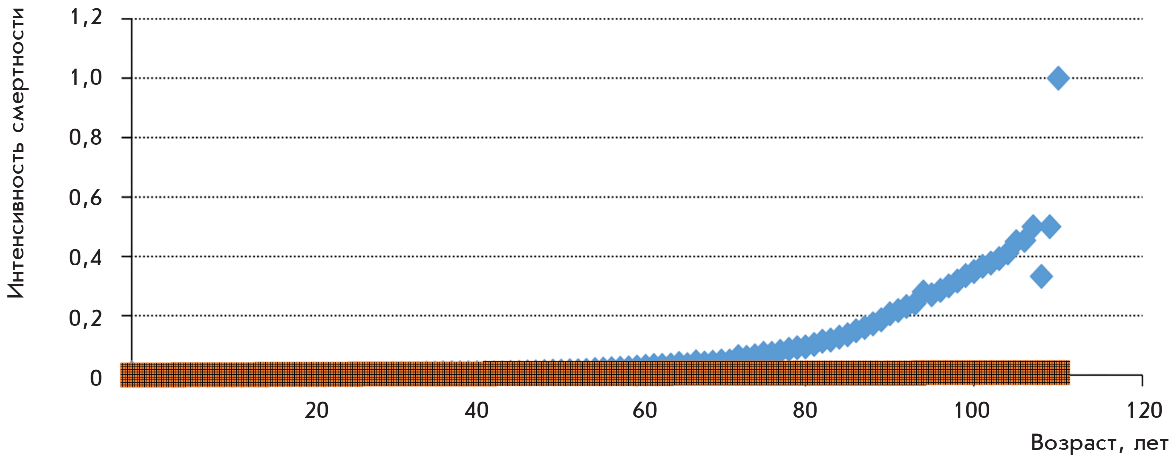

Рис. 11. График подбора интенсивности смертности модели Эрланга

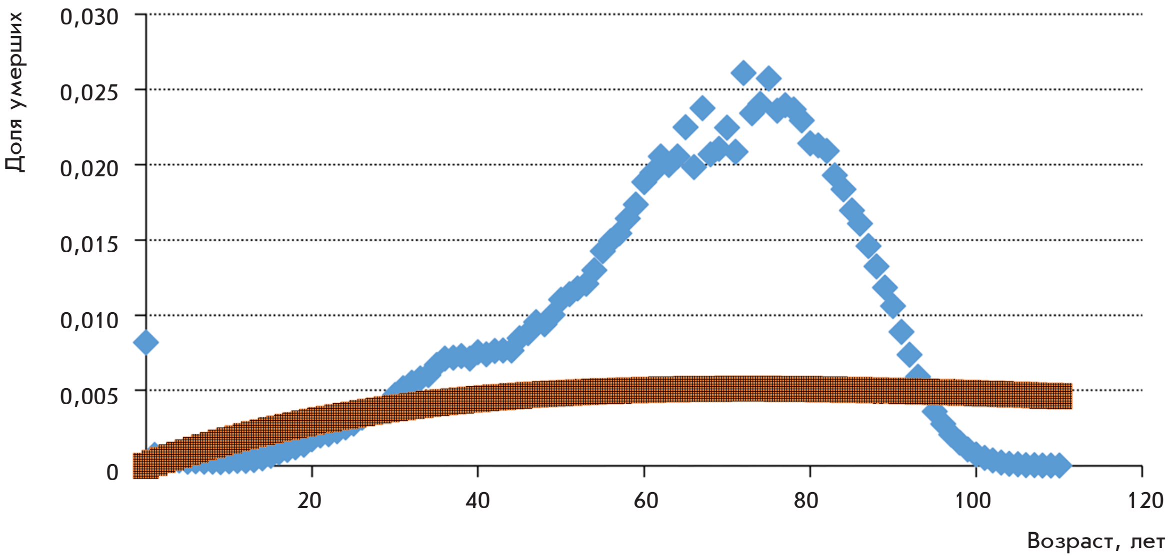

Рис. 12. График подбора кривой смертности модели Эрланга

можно сделать вывод, что современные статистические данные лучше всего описывают модели Гомпертца и Мэйкхама. Если выбирать из этих двух моделей, то лучше отдать предпочтение модели Мэйкхама, так как параметр A учитывает риски, связанные с несчастными случаями, а второе слагаемое $\beta e^{\alpha x}$ — влияние возраста на смерть.

Оцененные модели можно рекомендовать для работы пенсионным фондам, страховым компаниям и различным структурам, которые в своих расчетах используют таблицы смертности.

В заключение отметим, что определенным преимуществом аналитических законов является то, что для них вероятностные характеристики продолжительности жизни можно легко вычислять по небольшому числу параметров. Это может оказаться полезным и в тех случаях, когда доступные статистические данные немногочисленны.

Приложение. Таблица смертности населения России для календарного года 2017 (мужчины)

Возраст x лет	Вероятность смерти $f(x)$ в интервале возрастов от x до $x+1$	Число доживших до возраста x лет $l(x)$	Число умерших $d(x)$ в возрасте x лет	Вероятность дожития до возраста x лет $S(x)$	Интенсивность смертности в возрасте x лет	Ожидаемая продолжительность предстоящей жизни $m(x)$ в возрасте x лет
0	0,008 20	100 000	820	1	0,008 27	*65,26*
1	0,000 72	99 180	71	0,991 80	0,000 72	64,80

ISSN 2500-2759

Продолжение таблицы

Возраст *x* лет	Вероятность смерти $f(x)$ в интервале возрастов от x до $x+1$	Число доживших до возраста *x* лет $l(x)$	Число умерших $d(x)$ в возрасте *x* лет	Вероятность дожития до возраста *x* лет $S(x)$	Интенсивность смертности в возрасте *x* лет	Ожидаемая продолжительность предстоящей жизни $m(x)$ в возрасте *x* лет
2	0,000 45	99 108	45	0,991 08	0,000 45	63,84
3	0,000 40	99 064	39	0,990 64	0,000 40	62,87
4	0,000 36	99 024	36	0,990 24	0,000 36	61,90
5	0,000 29	98 988	29	0,989 88	0,000 29	60,92
6	0,000 31	98 960	30	0,989 60	0,000 31	59,94
7	0,000 28	98 929	27	0,989 29	0,000 28	58,95
8	0,000 27	98 902	27	0,989 02	0,000 27	57,97
9	0,000 25	98 875	25	0,988 75	0,000 25	56,99
10	0,000 29	98 851	29	0,988 51	0,000 29	56,00
11	0,000 32	98 822	31	0,988 22	0,000 32	55,02
12	0,000 34	98 790	34	0,987 90	0,000 34	54,03
13	0,000 39	98 757	39	0,987 57	0,000 39	53,05
14	0,000 50	98 718	49	0,987 18	0,000 50	52,07
15	0,000 68	98 669	67	0,986 69	0,000 68	51,10
16	0,000 91	98 602	90	0,986 02	0,000 91	50,13
17	0,001 07	98 512	106	0,985 12	0,001 07	49,18
18	0,001 26	98 406	124	0,984 06	0,001 26	48,23
19	0,001 42	98 282	140	0,982 82	0,001 43	47,29
20	0,001 78	98 142	175	0,981 42	0,001 78	46,36
21	0,002 07	97 967	203	0,979 67	0,002 07	45,44
22	0,002 14	97 765	210	0,977 65	0,002 15	44,53
23	0,002 35	97 555	229	0,975 55	0,002 35	43,63
24	0,002 61	97 326	254	0,973 26	0,002 61	42,73
25	0,002 91	97 072	282	0,970 72	0,002 91	41,84
26	0,003 30	96 790	319	0,967 90	0,003 30	40,96
27	0,003 66	96 471	353	0,964 71	0,003 66	40,09
28	0,003 81	96 118	366	0,961 18	0,003 82	39,24
29	0,004 05	95 752	388	0,957 52	0,004 06	38,39
30	0,004 92	95 364	469	0,953 64	0,004 93	37,54
31	0,005 43	94 894	515	0,948 94	0,005 44	36,72
32	0,005 85	94 379	552	0,943 79	0,005 86	35,92
33	0,006 17	93 828	579	0,938 28	0,006 19	35,13
34	0,006 45	93 249	601	0,932 49	0,006 47	34,35
35	0,007 24	92 648	671	0,926 48	0,007 27	33,57
36	0,007 75	91 977	713	0,919 77	0,007 78	32,81
37	0,007 88	91 264	719	0,912 64	0,007 91	32,06
38	0,008 07	90 545	730	0,905 45	0,008 10	31,31
39	0,007 93	89 815	713	0,898 15	0,007 97	30,56
40	0,008 46	89 102	754	0,891 02	0,008 50	29,80
41	0,008 39	88 348	741	0,883 48	0,008 42	29,05
42	0,008 73	87 607	764	0,876 07	0,008 76	28,29
43	0,008 83	86 843	767	0,868 43	0,008 87	27,54
44	0,008 90	86 076	766	0,860 76	0,008 94	26,78
45	0,009 93	85 310	847	0,853 10	0,009 98	26,01
46	0,010 41	84 463	880	0,844 63	0,010 47	25,27
47	0,011 41	83 583	954	0,835 83	0,011 48	24,53
48	0,011 39	82 629	941	0,826 29	0,011 45	23,81
49	0,012 27	81 689	1 002	0,816 89	0,012 34	23,08
50	0,013 67	80 687	1 103	0,806 87	0,013 77	22,36

ISSN 2500-2759

Продолжение таблицы

Возраст x лет	Вероятность смерти $f(x)$ в интервале возрастов от x до $x + 1$	Число доживших до возраста x лет $l(x)$	Число умерших $d(x)$ в возрасте x лет	Вероятность дожития до возраста x лет $S(x)$	Интенсивность смертности в возрасте x лет	Ожидаемая продолжительность предстоящей жизни $m(x)$ в возрасте x лет
51	0,014 33	79 583	1 140	0,795 83	0,014 43	21,66
52	0,014 99	78 443	1 176	0,784 43	0,015 10	20,97
53	0,015 65	77 267	1 209	0,772 67	0,015 77	20,28
54	0,017 07	76 058	1 299	0,760 58	0,017 22	19,59
55	0,019 07	74 759	1 425	0,747 59	0,019 25	18,92
56	0,020 36	73 334	1 493	0,733 34	0,020 57	18,28
57	0,021 50	71 841	1 545	0,718 41	0,021 74	17,65
58	0,023 35	70 296	1 642	0,702 96	0,023 63	17,03
59	0,025 27	68 654	1 735	0,686 54	0,025 60	16,42
60	0,028 18	66 919	1 886	0,669 19	0,028 58	15,84
61	0,029 93	65 034	1 946	0,650 34	0,030 38	15,28
62	0,032 56	63 087	2 054	0,630 87	0,033 10	14,74
63	0,032 71	61 033	1 997	0,610 33	0,033 26	14,22
64	0,034 77	59 036	2 053	0,590 36	0,035 39	13,68
65	0,039 46	56 983	2 249	0,569 83	0,040 26	13,16
66	0,036 24	54 735	1 984	0,547 35	0,036 91	12,68
67	0,045 04	52 751	2 376	0,527 51	0,046 08	12,13
68	0,041 06	50 375	2 068	0,503 75	0,041 92	11,68
69	0,043 54	48 307	2 103	0,483 07	0,044 51	11,16
70	0,048 63	46 203	2 247	0,462 03	0,049 84	10,65
71	0,047 43	43 956	2 085	0,439 56	0,048 58	10,16
72	0,062 36	41 872	*2 611*	0,418 72	0,064 36	9,65
73	0,059 66	39 261	2 342	0,392 61	0,061 50	9,25
74	0,065 13	36 918	2 404	0,369 18	0,067 32	8,81
75	0,074 56	34 514	2 573	0,345 14	0,077 44	8,39
76	0,073 81	31 941	2 357	0,319 41	0,076 64	8,02
77	0,080 99	29 583	2 396	0,295 83	0,084 41	7,62
78	0,087 11	27 187	2 368	0,271 87	0,091 07	7,25
79	0,092 43	24 819	2 294	0,248 19	0,096 91	6,90
80	0,095 03	22 525	2 141	0,225 25	0,099 77	6,55
81	0,104 35	20 384	2 127	0,203 84	0,110 09	6,18
82	0,114 63	18 257	2 093	0,182 57	0,121 60	5,84
83	0,119 38	16 165	1 930	0,161 65	0,126 96	5,54
84	0,129 06	14 235	1 837	0,142 35	0,137 96	5,22
85	0,136 71	12 398	1 695	0,123 98	0,146 73	4,92
86	0,150 42	10 703	1 610	0,107 03	0,162 66	4,62
87	0,160 50	9 093	1 459	0,090 93	0,174 50	4,35
88	0,173 52	7 634	1 325	0,076 34	0,190 00	4,08
89	0,187 47	6 309	1 183	0,063 09	0,206 86	3,83
90	0,207 33	5 126	1 063	0,051 26	0,231 31	3,60
91	0,218 94	4 063	890	0,040 63	0,245 86	3,41
92	0,232 30	3 174	737	0,031 74	0,262 83	3,23
93	0,242 33	2 436	590	0,024 36	0,275 74	3,05
94	0,281 95	1 846	521	0,018 46	0,328 23	2,87
95	0,271 42	1 326	360	0,013 26	0,314 04	2,80
96	0,286 75	966	277	0,009 66	0,334 74	2,66
97	0,302 28	689	208	0,006 89	0,356 10	2,52
98	0,317 95	481	153	0,004 81	0,378 05	2,40
99	0,333 68	328	109	0,003 28	0,400 50	2,29

ISSN 2500-2759

Окончание таблицы

Возраст x лет	Вероятность смерти $f(x)$ в интервале возрастов от x до $x+1$	Число доживших до возраста x лет $l(x)$	Число умерших $d(x)$ в возрасте x лет	Вероятность дожития до возраста x лет $S(x)$	Интенсивность смертности в возрасте x лет	Ожидаемая продолжительность предстоящей жизни $m(x)$ в возрасте x лет
100	0,349 42	218	76	0,002 18	0,423 39	2,18
101	0,365 08	142	52	0,001 42	0,446 60	2,08
102	0,380 60	90	34	0,000 90	0,470 06	1,99
103	0,395 92	56	22	0,000 56	0,493 64	1,91
104	0,410 97	34	14	0,000 34	0,517 25	1,83
105	0,425 69	20	8	0,000 20	0,540 79	1,76
106	0,440 03	11	5	0,000 11	0,564 15	1,70
107	0,453 94	6	3	0,000 06	0,587 22	1,64
108	0,467 39	3	2	0,000 03	0,609 92	1,59
109	0,480 33	2	1	0,000 02	0,632 15	1,55
110+	1,000 00	1	1	0,000 01	0,653 84	1,53

Источник: The Human Mortality Database. Russia. Life tables by year of death (period), 1959–2016, 1x1, female, male // Демоскоп Weekly. URL: http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus_lt.php?year=50.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суходолов А.П. Анализ подходов в моделировании средств массовой информации / А.П. Суходолов, И.А. Кузнецова, С.В. Тимофеев // Вопросы теории и практики журналистики. — 2017. — Т. 6, № 3. — С. 287–305. — DOI: 10.17150/2308-6203.2017.6(3).287-305.

2. Аксенюшкина Е.В. Нахождение оптимальной инвестиционной стратегии финансовой организации [Электронный ресурс] / Е.В. Аксенюшкина // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 4. — Режим доступа: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id= 21904.— DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16.

3. Аксенюшкина Е.В. Решение задачи оптимизации расхода сбережений на основе принципа максимума / Е.В. Аксенюшкина // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2018. — № 1. — С. 3–18. — DOI:10.18101/2304-5728-2018-1-3-18.

4. Мамонова Н.В. Исследование рынка недвижимости в городе Шелехове [Электронный ресурс] / Н.В. Мамонова // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 1.— Режим доступа: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21388.— DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(1).14.

5. Моделирование стоимости квартир на региональном рынке жилой недвижимости (на примере Иркутской области) / Л.В. Санина [и др.] // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. — 2017. — Т. 7, № 3. — С. 27–41. — DOI: 10.21285/2227-2917-2017-3-27-41.

6. Ахвледиани Ю.Т. Страхование : учебник / Ю.Т. Ахвледиани. — М. : Юнити-Дана, 2012. — 567с.

7. Леонова О.В. Исследование законов смертности населения [Электронный ресурс] / О.В. Леонова, Ю.Г. Яковлева // Экономика. Право. Менеджмент : сб. тр. — Иркутск, 2016. — Вып.1 (5). — Режим доступа: http://izdatelstvo.bgu.ru/epm/archive.aspx?id=39.

8. Леонова О.В. Аналитическая аппроксимация в личном страховании / О.В. Леонова // Проблемы и перспективы современной науки : материалы 14-й Междунар. науч.-практ. конф. : сб. ст. — М., 2017. — С. 148–153.

9. Актуарные расчеты в страховании жизни и пенсионном страховании / Н.В. Звездина [и др.]. — М.: Евразийский открытый ин-т, 2012. — 485 с.

10. Кошкин Г.М. Основы страховой (актуарной) математики : учеб. пособие / Г.М. Кошкин. — Томск : Том. гос. ун-т, 2012. — 116 с.

11. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти. — М. : Инфра-М, 1999. — 402 с.

12. Колемаев В.А. Эконометрика : учебник / В.А. Колемаев. — М. : Инфра-М, 2009. — 160 с.

13. Балдин К.В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рокосуев. — М. : Флинта, 2010. — 245 с.

14. Кремер Н.Ш. Эконометрика : учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. — М. : Юнити-Дана, 2006. — 310 с.

15. Шипачев В.С. Математический анализ. Теория и практика / В.С. Шипачев. — М. : Высш. шк., 2009. — 350 с.

REFERENCES

1. Sukhodolov A.P., Kuznetsova I.A., Timofeev S.V. The Analysis of Approaches in Modelling of Mass Media. *Voprosy teorii i praktiki zhurnalistiki = Theoretical and Practical Issues of Journalism*, 2017, vol. 6, no. 3, pp. 287–305. DOI: 10.17150/2308-6203.2017.6(3).287-305. (In Russian).

2. Aksenushkina Ye.V. Finding an Optimal Investment Strategy of Financial Institution. *Baikal Research Journal*, 2017, vol. 8, no. 4. Available at: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21904.DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16. (In Russian).

ISSN 2500-2759

3. Aksenyushkina E.V. Solution of the Problem of Optimal Consumption and Saving Based on the Maximum Principle. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika = Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics*, 2018, no. 1, pp. 3–18. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-3-18. (In Russian).

4. Mamonova N.V. Investigation of Real Estate Market in the Shelekhov Town. *Baikal Research Journal*, 2017, vol. 8, no. 1. Available at: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21388. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(1).14.(In Russian).

5. Sanina L.V., Sherstyankina N.P., Bergen D.N., Dashkevich P.M. Modeling of the Price for Flats at the Regional Market of Real Estate (at the Example of Irkutsk Region). *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost' = Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 27–41. DOI: 10.21285/2227-2917-2017-3-27-41. (In Russian).

6. Akhvlediani Yu.T. *Strakhovanie* [Insurance]. Moscow, Yuniti-Dana Publ., 2012. 567 p.

7. Leonova O.V., Yakovleva Yu.G. Studies on Population Mortality Laws. *Ekonomika. Pravo. Menedzhment* [Economic. Law. Management]. Irkutsk, 2016, iss. 1 (5). Available at: http://izdatelstvo.bgu.ru/epm/archive. aspx?id=39. (In Russian).

8. Leonova O.V. Analytical approximation in personal insurance. *Problemy i perspektivy sovremennoi nauki. Materialy 14-i Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Problems and Prospects of Modern Science. Materials of the 14th International Scientific and Practical Conference]. Moscow, 2017, pp. 148–153. (In Russian).

9. Zvezdina N.V., Ivanova A.V., Skorik M.A., Egorova T.A. *Aktuarnye raschety v strakhovanii zhizni i pensionnom strakhovanii* [Actuarial Calculation of Life Insurance and Pension Insurance]. Moscow, Eurasian Open Institute Publ., 2012. 485 p.

10. Koshkin G.M. *Osnovy strakhovoi (aktuarnoi) matematiki* [Fundamentals of Actuarial Mathematics]. Tomsk State University Publ., 2012. 116 p.

11. Dougerti K. *Vvedenie v ekonometriku* [Introduction to Econometrics]. Moscow, Infra-M Publ., 1999. 402 p.

12. Kolemaev V.A. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow, Infra-M Publ., 2009. 160 p.

13. Baldin K.V., Bashlykov V.N., Rokosuev A.V. *Osnovy teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistiki* [Fundamentals of Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow, Flinta Publ., 2010. 245 p.

14. Kremer N. Sh., Putko B.A. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow, Yuniti-Dana Publ., 2006. 310 p.

15. Shipachev V.S. *Matematicheskii analiz. Teoriya i praktika* [Mathematical Analysis. Theory and Practice]. Moscow, 2009. 350 p.

Информация об авторе

Леонова Ольга Васильевна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и статистики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: olga.olgaleonova@yandex.ru.

Для цитирования

Леонова О.В. Моделирование смертности населения с помощью аналитических законов на примере России / О.В. Леонова // Известия Байкальского государственного университета. — 2019. — Т. 29, № 1. — С. 95–106. — DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(1).95-106.

Author

Olga V. Leonova — Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Statistics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: olga.olgaleonova@yandex.ru.

For Citation

Leonova O.V. Population Death Rate Modeling by Means of Analytical Laws Illustrated by the Example of Russia. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 95–106. DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(1).95-106. (In Russian).

ISSN 2500-2759